ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΙΑ -- ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Άσκηση 1η – Όρια

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+4}{x^3+4x^2+4x}$ β) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{2x-3}{\text{συν}x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+5}{1-\text{συν}x}$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x|x|}$

ΛΥΣΗ

α) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+4}{x^3+4x^2+4x}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+4}{x\left(x^2+4x+4\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+4}{x\left(x+2\right)^2}$

- $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x+4}{x\left(x+2\right)^2}=\lim\limits_{x\to -2^-}\left[\dfrac{1}{\left(x+2\right)^2}\cdot\dfrac{x+4}{x}\right]=+\infty\cdot\left(-1\right)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x+4}{x\left(x+2\right)^2}=\lim\limits_{x\to -2^+}\left[\dfrac{1}{\left(x+2\right)^2}\cdot\dfrac{x+4}{x}\right]=+\infty\cdot\left(-1\right)=-\infty$

Επομένως $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+4}{x^3+4x^2+4x}=-\infty$.

β) Η απροσδιοριστία είναι $\dfrac{\alpha}{0}$ οπότε παίρνουμε πλευρικά όρια.

- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\dfrac{2x-3}{\text{συν}x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left[\dfrac{1}{\text{συν}x}\cdot\left(2x-3\right)\right]=+\infty\cdot\left(\pi-3\right)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\dfrac{2x-3}{\text{συν}x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left[\dfrac{1}{\text{συν}x}\cdot\left(2x-3\right)\right]=-\infty\cdot\left(\pi-3\right)=-\infty$

διότι: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}^-$ επομένως

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$. Επίσης $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \sigma\upsilon\nu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x < 0$ κοντά στο

$\frac{\pi}{2}^+$ επομένως $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = -\infty$. Άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x-3}{\sigma\upsilon\nu x}$.

γ) Η απροσδιοριστία είναι $\frac{\alpha}{0}$ οπότε παίρνουμε πλευρικά όρια.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+5}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\cdot(x+5)\right] = +\infty\cdot 5 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x+5}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\cdot(x+5)\right] = +\infty\cdot 5 = +\infty$

διότι είναι $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x) = 0$ και $1-\sigma\upsilon\nu x > 0$ κοντά στο 0.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+5}{1-\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$.

δ) Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-2}{x|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x^2}\cdot(x-2)\right] = +\infty\cdot(-2) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-2}{x|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-2}{-x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{-x^2}\cdot(x-2)\right] = -\infty\cdot(-2) = +\infty$

Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{2}{x}\right)$.

Άσκηση 2^{η} – Όρια

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-|x^2-6x+3|}{x^3-|x^3-5x^2+2|}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3x}}{x-1}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-5}-\sqrt{4x^2+3x}}{\sqrt{x^2-3x+1}+x}$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-5x^2+x}-\sqrt{9x^2-x+1}\right)$

ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x^5-2x+8|-|x^2-x^3+10|\right)$ στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x}{|x-x^3+5|}\right)$

ΛΥΣΗ

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-6x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ και επομένως $x^2-6x+3>0$ στην περιοχή του $-\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-5x^2+2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και επομένως

$x^3-5x^2+2<0$ στην περιοχή του $-\infty$. Επομένως θα έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-|x^2-6x+3|}{x^3-|x^3-5x^2+2|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(x^2-6x+3\right)}{x^3+\left(x^3-5x^2+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-3}{2x^3-5x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{2x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=0.$$

β) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3x}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1-1}{1} = 0.$$

γ) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2-5}-\sqrt{4x^2+3x}}{\sqrt{x^2-3x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{9-\frac{5}{x^2}}-x\sqrt{4+\frac{3}{x}}}{x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9-\frac{5}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x}}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{3-2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

δ) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-5x^2+x}-\sqrt{9x^2-x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3\left(8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt[3]{8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt[3]{8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\right] = +\infty\cdot(2-3) = -\infty$$

ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-2x+8\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ άρα $x^5-2x+8<0$ στην περιοχή του $-\infty$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x^3+10\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right) = +\infty$ άρα $x^2-x^3+10>0$ στην περιοχή του $-\infty$. Επομένως θα έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left|x^5-2x+8\right|-\left|x^2-x^3+10\right|\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^5+2x-8-x^2+x^3-10\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^5+x^3-x^2+2x-18\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^5\right)=+\infty$$

στ) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^3+5\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$ άρα $x-x^3+5<0$ στην

περιοχή του $+\infty$. Επομένως θα έχουμε:

$$-1\le \sigma\upsilon\nu 3x\le 1\Rightarrow \frac{-1}{\left|x-x^3+5\right|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\left|x-x^3+5\right|}\le\frac{1}{\left|x-x^3+5\right|}$$

Όμως: $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left|x-x^3+5\right|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^3-x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^3}=0$

Ομοίως: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left|x-x^3+5\right|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3-x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$

και επομένως από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\left|x-x^3+5\right|}=0$$

Άσκηση 3η – Όρια

Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε να είναι $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x+\alpha\sigma\upsilon\nu x-\beta}{x^2+x}=2016$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x+\alpha\sigma\upsilon\nu x-\beta}{x^2+x}$

με $\lim_{x\to 0}f(x)=2016$. Θα έχουμε λοιπόν:

$$f(x)=\frac{\alpha x+\alpha \sigma \upsilon \nu x-\beta}{x^2+x} \Leftrightarrow f(x)\left(x^2+x\right)=\alpha x+\alpha \sigma \upsilon \nu x-\beta \quad \text{οπότε}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)\left(x^2+x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\alpha x+\alpha \sigma \upsilon \nu x-\beta\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)\lim_{x\to 0}\left(x^2+x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\alpha x+\alpha \sigma \upsilon \nu x-\beta\right) \Leftrightarrow 2016\cdot 0=\alpha-\beta \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta \quad (1)$ Συνεπώς θα είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x+\alpha \sigma \upsilon \nu x-\beta}{x^2+x} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x+\alpha \sigma \upsilon \nu x-\alpha}{x^2+x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha x}{x^2+x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha(\sigma \upsilon \nu x-1)}{x^2+x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha}{x+1}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\alpha(\sigma \upsilon \nu x-1)}{x(x+1)}\right)=$$

$$=\alpha+\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sigma \upsilon \nu x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=\alpha+\alpha\cdot 0\cdot 1=\alpha$$

Επομένως είναι $\alpha=2016$ οπότε $\beta=2016$.

Άσκηση 4^{η} – Όρια

Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια, ώστε $2x-1\le f(x)\le x^2$, για κάθε $x\in R$.

α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{h\to 0} f(1+h)$.

γ) Αν είναι $f(x)\neq 1$ κοντά στο 1, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left|f^2(x)-3\right|+f(x)-3}{f(x)-1}.$$

ΛΥΣΗ

α) Για $x\in R$ έχουμε: $2x-1\le f(x)\le x^2$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

β) Θέτουμε $1+h=x$. Όταν το $h\to 0$, το $x\to 1$, οπότε έχουμε:

$\lim\limits_{h\to 0}f(1+h)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, επομένως $\lim\limits_{h\to 0}f(1+h)=1$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left[f^2(x)-3\right]=-2<0$, θα είναι $f^2(x)-3<0$ κοντά στο 1.

Έτσι έχουμε: $\dfrac{\left|f^2(x)-3\right|+f(x)-3}{f(x)-1}=\dfrac{-f^2(x)+3+f(x)-3}{f(x)-1}=$

$$=\frac{-f^2(x)+f(x)}{f(x)-1}=\frac{-f(x)\left(f(x)-1\right)}{f(x)-1}=-f(x).$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|f^2(x)-3\right|+f(x)-3}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[-f(x)\right]=-1$.

Άσκηση 5^{η} – Όρια

Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ αν ισχύει:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{P(x)}{x^2-2x+1}=3$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{P(x)}{x^2-2x+1}=3$

ΛΥΣΗ

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{P(x)}{x^2-2x+1}=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{x^2}=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\alpha_\nu x^{\nu-2}\right)=3$.

- Αν $\nu>2$ τότε $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\alpha_\nu x^{\nu-2}\right)=+\infty$ ή $-\infty$ το οποίο απορρίπτεται.

- Αν $0<\nu<2$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha_\nu x^{\nu-2}\right)=0$ που επίσης απορρίπτεται.

Επομένως πρέπει $\nu=2$ και $\alpha_\nu=3$. Άρα το $P(x)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού και έστω λοιπόν $P(x)=3x^2+\beta x+\gamma$.

Θέτουμε τώρα $g(x)=\dfrac{P(x)}{x^2-2x+1}$ με $\lim\limits_{x\to1}g(x)=3$.

Άρα $P(x)=\left(x^2-2x+1\right)g(x) \quad\Rightarrow 3x^2+\beta x+\gamma=(x-1)^2g(x)$

$\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2+\beta x+\gamma\right)=\lim\limits_{x\to1}\left[(x-1)^2\cdot g(x)\right]\Rightarrow 3+\beta+\gamma=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma=-\beta-3 \quad (1)$.

Άρα $g(x)=\dfrac{3x^2+\beta x+\gamma}{(x-1)^2}\Rightarrow g(x)=\dfrac{(x-1)\left[3(x+1)+\beta\right]}{(x-1)^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x)=\dfrac{\left[3x+3+\beta\right]}{x-1}\quad\Rightarrow 3x+3+\beta=(x-1)g(x)$.

Οπότε: $\lim\limits_{x\to1}(3x+3+\beta)=\lim\limits_{x\to1}\left[(x-1)g(x)\right]\Rightarrow\beta+6=0\Rightarrow\beta=-6$ και από $(1)\Rightarrow\gamma=3$. Άρα $P(x)=3x^2-6x+3$.

Άσκηση 6^{η} – Όρια

Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ αν ισχύει:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{P(x)}{x^2-2x+1}=3$ και Αν ισχύει $|g(x)-1|\le|f(x)|$ για κάθε $x\in R$

και $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$, να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x-1}\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to1}g(x)$

δ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\eta\mu(x-1)}$ ε) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|g(x)-3|-2}{g^2(x)-g(x)}$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$ με $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=3$. Οπότε θα έχουμε:

$$h(x)=\frac{f(x)}{x-1}\Leftrightarrow f(x)=(x-1)h(x) \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[(x-1)h(x)\right]=\lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim_{x\to 1}h(x)=0\cdot 3=0.$$

β) Είναι: $\left|f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x-1}\right|=|f(x)|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{1}{x-1}\right|\le|f(x)|\cdot 1$.

Οπότε: $\left|f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x-1}\right|\le|f(x)|\Leftrightarrow -|f(x)|\le f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x-1}\le|f(x)|$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 1}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to 1}f(x)\right|=|0|=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}(-|f(x)|)=\lim\limits_{x\to 1}|f(x)|=0$ και από το κριτήριο παρεμβολής

θα είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x-1}\right)=0$.

γ) $|g(x)-1|\le|f(x)|\Leftrightarrow |f(x)|\le g(x)-1\le|f(x)|\Rightarrow$

$1-|f(x)|\le g(x)\le|f(x)|+1$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 1}(1-|f(x)|)=\lim\limits_{x\to 1}(|f(x)+1|)\overset{(\alpha)}{=}1$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=1$.

δ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\eta\mu(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x-1}}{\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}}{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}}=\dfrac{3}{1}=3$ διότι στο

όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$ θέτοντας $x-1=t$ είναι $x\to1\Rightarrow t\to0$ και

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\eta\mu t}{t}=1$.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to1}(g(x)-3)\overset{(\gamma)}{=}1-3=-2<0$. Επομένως $g(x)-3<0$

κοντά στο $x_0=1$. Θα έχουμε λοιπόν:

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|g(x)-3|-2}{g^2(x)-g(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-g(x)+3-2}{g(x)(g(x)-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(g(x)-1)}{g(x)(g(x)-1)}=$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{g(x)}=\dfrac{-1}{\lim\limits_{x\to1}g(x)}=\dfrac{-1}{1}=-1$.

Άσκηση 7^{η} – Όρια

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$f^3(x)+2x^2f(x)=3\eta\mu^3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(f(x))}{x}$ iii) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}$

ΛΥΣΗ

α) Για $x \neq 0$ διαιρούμε με x^3 και θα έχουμε:

$$f^3(x) + 2x^2 f(x) = 3\eta\mu^3 x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + 2\frac{f(x)}{x} = 3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$$

Οπότε θα είναι:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + 2\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to 0} 3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)^3 + 2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right] = 3\left(\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 + 2\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha^3 + 2\alpha - 3 = 0$$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$\alpha^3 + 2\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 3) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ διότι το τριώνυμο

$\alpha^2 + \alpha + 3$ δεν έχει ρίζες αφού είναι $\Delta < 0$. Άρα $\alpha = 1$.

β) Παρατηρούμε ότι σε περιοχή του 0 θα έχουμε:

i) $\dfrac{f(\eta\mu x)}{x} = \dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \dfrac{\eta\mu x}{x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \dfrac{\eta\mu x}{x}\right]$

(1)

Για το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής θέτοντας

$\eta\mu x = y$ οπότε $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$ και συνεπώς θα είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} = \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y} \overset{(\alpha)}{=} \alpha = 1 \quad (2)$$

Άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\overset{(2)}{=}1\cdot 1=1$$

ii) $\dfrac{f(f(x))}{x}=\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}$ οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\right]$$

Για το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(f(x))}{f(x)}$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής θέτοντας

$f(x)=u$ όπου

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{(\alpha)}{=}0\cdot 1=0$$

άρα $x\to 0\Rightarrow u\to 0$ και επομένως θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1\cdot 1=1.$$

iii)

$$\frac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}=\frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=$$

$$=\frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x}{x-2}$$ οπότε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x^2-x)}{x^2-x}\cdot\frac{x}{x-2}\right]$$

Για το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\left(x^2-x\right)}{x^2-x}$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής

θέτοντας $x^2-x=t$ άρα $x\to 1 \Rightarrow t\to 0$ και έτσι θα είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x^2-x\right)}{x^2-x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\overset{(\alpha)}{=}1.$$ Επομένως:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x^2-x\right)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f\left(x^2-x\right)}{x^2-x}\cdot\frac{x}{x-2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x^2-x\right)}{x^2-x}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-2}=1\cdot(-1)=-1$$

Άσκηση 8^{η} – Όρια

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-\lambda x+\lambda}{|x-2|}$

ΛΥΣΗ

Έστω $f(x)=\dfrac{x^2-\lambda x+\lambda}{|x-2|},\quad x\neq 2$

Το όριο $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-\lambda x+\lambda}{|x-2|}$ με αντικατάσταση δίνει απροσδιοριστία

$\dfrac{4-\lambda}{0}$ με $|x-2|>0$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $4-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<4$, τότε:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{|x-2|}(x^2-\lambda x+\lambda)=+\infty(4-\lambda)=+\infty$$

- Αν $4-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>4$, τότε

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|}(x^2-\lambda x+\lambda) = -\infty(4-\lambda) = -\infty$$

- Αν $4-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=4$, αντικαθιστούμε στην $f(x)$ και θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{|x-2|} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{|x-2|} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{|x-2|} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{|x-2|^2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2}|x-2| = 0$$

Άσκηση 9η – Όρια

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2012+3^x+4^x}{1+5^x+e^x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{x+1}+2^x}{3^x+2^{x+1}}$

ΛΥΣΗ

α) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2012+3^x+4^x}{1+5^x+e^x} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}2012+\lim\limits_{x\to-\infty}3^x+\lim\limits_{x\to-\infty}4^x}{\lim\limits_{x\to-\infty}1+\lim\limits_{x\to-\infty}5^x+\lim\limits_{x\to-\infty}e^x} =$$

$$=\frac{2012+0+0}{1+0+0} = 2012$$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$ με $\alpha>1$.

$$\lim_{x\to-\infty}3^x = \lim_{x\to-\infty}4^x = \lim_{x\to-\infty}5^x = \lim_{x\to-\infty}e^x = 0$$

β) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}+2^x}{3^x+2^{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot 3^x+2^x}{3^x+2\cdot 2^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left[3+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]}{3^x\left[1+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}3+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x} = \frac{3+0}{1+0} = 3$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ αφού $0<\frac{2}{3}<1$.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Άσκηση 10η – Συνέχεια συνάρτησης

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 0$ τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+e|-|x-e|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

β) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}-1}, & x<0 \\ 1+x^3\cdot\eta\mu 2x, & x\geq 0 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x+e|-|x-e|}{x} =$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\left(|x+e|-|x-e|\right)\cdot\left(|x+e|+|x-e|\right)}{x\cdot\left(|x+e|+|x-e|\right)} =$$

$$\lim_{x\to0}\frac{|x+e|^2-|x-e|^2}{x\cdot\left(|x+e|+|x-e|\right)} = \lim_{x\to0}\frac{(x+e)^2-(x-e)^2}{x\cdot\left(|x+e|+|x-e|\right)} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4xe}{x\cdot\left(|x+e|+|x-e|\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4e}{|x+e|+|x-e|}=\frac{4e}{|e|+|-e|}=\frac{4e}{2e}=2$$

- $f(0)=2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) Έχουμε:

- $$\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot ημx}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot ημx\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot ημx\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-1^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot ημx\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{ημx}{x}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right]=1\cdot 2=2.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+x^3\cdot ημ2x\right)=1+0\cdot 0=1$.

- $g(0)=1+0^3\cdot 0=1$.

Επειδή δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$, η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Άσκηση 11η – Συνέχεια συνάρτησης

Έστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$f(x^4+x+1)=x^3-x$ για κάθε $x\in R$.

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

ΛΥΣΗ

Επειδή η f είναι συνεχής στο R, θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 3$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$. Όμως από τη δοθείσα σχέση για $x = 1$ θα έχουμε: $f(3) = 1 - 1 \Rightarrow f(3) = 0$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$.

Άσκηση 12η – Συνέχεια συνάρτησης

Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:
$f^2(x) + 6f(x) + 9\sigma\upsilon\nu^2 x^4 \le 0$ για κάθε $x \in R$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

Είναι: $f^2(x) + 6f(x) + 9\sigma\upsilon\nu^2 x^4 \le 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 6f(x) + 9\left(1 - \eta\mu^2 x^4\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(x) + 6f(x) + 9 \le 9\eta\mu^2 x^4 \Leftrightarrow (f(x)+3)^2 \le \left(3\eta\mu x^4\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(f(x)+3)^2} \le \sqrt{\left(3\eta\mu x^4\right)^2} \Leftrightarrow |f(x)+3| \le \left|3\eta\mu x^4\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\left|3\eta\mu x^4\right| \le f(x) + 3 \le \left|3\eta\mu x^4\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\left|3\eta\mu x^4\right| - 3 \le f(x) \le \left|3\eta\mu x^4\right| - 3$. Όμως είναι

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|3\eta\mu x^4\right| - 3\right) = -0 - 3 = -3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left|3\eta\mu x^4\right| - 3\right) = 0 - 3 = -3$

επομένως από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -3 \quad (1)$

Επειδή η ανίσωση $-\left|3\eta\mu x^4\right| - 3 \le f(x) \le \left|3\eta\mu x^4\right| - 3$ ισχύει για κάθε $x \in R$, θα ισχύει και για $x = 0$ οπότε θα είναι

$-\left|3\eta\mu 0^4\right| - 3 \le f(0) \le \left|3\eta\mu 0^4\right| - 3 \Leftrightarrow -3 \le f(0) \le -3 \Leftrightarrow f(0) = -3 \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ και επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.